Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA-1111)
2^{do} Examen Parcial (30 %)
Abr-Jul 2023
Tipo Unico

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

PREGUNTA 1. Resuelva:

$a)\ \lim_{t\to -2} \dfrac{-t^3+7t+6+\sqrt{t^3+7t^2+16t+12}}{t+2}$

$b)\ \lim_{t\to 0} \dfrac{sen(4t^2)-t^3}{t^3-t^2}$

$c)\ \lim_{t\to \pi} \dfrac{1+cos(t)}{(\pi-t)^2}$

$d)\ \lim_{t\to \infty} (t+1)^{1/3}(1-t)^{2/3}-t$

PREGUNTA 2. Demuestre usando la definición de límite:

$$\lim_{t\to 2} t^4 = 16$$

PREGUNTA 3. Analice la continuidad y diferenciabilidad de la siguiente función en $x=-5$:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\frac{8}{7}x^3+x^2-49x-98}{7x+49} & si \quad x<-5 \\ \frac{1}{49}x^2-\frac{5}{7}x-2 & si \quad x\geq 5 \end{cases}$$

PREGUNTA 4. Encuentre, usando el Teorema del Valor Intermedio, que en al menos un intervalo, la ecuación

$$\sec(2x)+3=0$$

posea dos raíces reales.

SOLUCIÓN 1. Resuelva:

Pregunta 1.a

$$\lim_{t\to -2} \frac{-t^3+7t+6+\sqrt{t^3+7t^2+16t+12}}{t+2}$$

Sustituimos con $t=-2$:

$$\lim_{t\to -2} \frac{8-14+6+\sqrt{-8+28-32+12}}{-2+2} = \lim_{t\to -2} \frac{0+\sqrt{0}}{0} = \frac{0}{0}$$

Nos encontramos con una indeterminación $\frac{0}{0}$. Para levantar la indeterminación, factorizamos los polinomios:

$$-t^3+7t+6 = (t+2)(-t^2+2t+3) = \boxed{-(t+2)(t-3)(t+1)}$$

$$t^3+7t^2+16t+12 = (t+2)(t^2+5t+6) = (t+2)(t+2)(t+3) = \boxed{(t+2)^2(t+3)}$$

Reescribimos el límite y operamos:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to -2} \frac{-t^3+7t+6+\sqrt{t^3+7t^2+16t+12}}{t+2} &= \lim_{t\to -2} \frac{\sqrt{(t+2)^2(t+3)}-(t+2)(t-3)(t+1)}{t+2} \\ &= \lim_{t\to -2} \frac{\sqrt{(t+3)}|t+2|-(t+2)(t-3)(t+1)}{t+2}\end{aligned}$$

Por la definición del Valor Absoluto, tenemos:

$$|t+2| = \begin{cases} t+2 & \text{si } t+2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -2 \\ -(t+2) & \text{si } t+2 < 0 \Leftrightarrow t < -2 \end{cases}$$

Como el límite tiende a t=-2 deberemos evaluar límites laterales para verificar la existencia del límite. Si ambos límites laterales existen y valen L, entonces el límite existe y vale L tal que:

$$\boxed{\lim_{t\to a} f(t) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to a^-} f(t) = L \quad \text{y} \quad \lim_{t\to a^+} f(t) = L}$$

Evaluámos el límite lateral izquierdo:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to -2^-} \frac{-\sqrt{(t+3)}(t+2)-(t+2)(t-3)(t+1)}{t+2} &= \lim_{t\to -2^-} \frac{-(t+2)\left[\sqrt{(t+3)}+(t-3)(t+1)\right]}{t+2} \\
&= -\lim_{t\to -2^-} \frac{\cancelto{1}{(t+2)}}{\cancel{(t+2)}}\left[\sqrt{(t+3)}+(t-3)(t+1)\right] \\
&= -\lim_{t\to -2^-} \left[\sqrt{(t+3)}+(t-3)(t+1)\right] \\
\text{Sustituimos con } t=-2 &= -\lim_{t\to -2^-} \left[\sqrt{(-2+3)}+(-2-3)(-2+1)\right] \\
&= -\lim_{t\to -2^-} \sqrt{1}+5 = -\lim_{t\to -2^-} 6 = -6
\end{aligned}$$

Finalmente:

Límite lateral izquierdo

$$\boxed{\lim_{t\to -2^-} \frac{-\sqrt{(t+3)}(t+2)-(t+2)(t-3)(t+1)}{t+2} = -6}$$

Evaluámos el límite lateral derecho:

$$\lim_{t\to -2^{+}} \frac{\sqrt{(t+3)}(t+2)-(t+2)(t-3)(t+1)}{t+2} = \lim_{t\to -2^{-}} \frac{(t+2)\left[\sqrt{(t+3)}-(t-3)(t+1)\right]}{t+2}$$

$$= \lim_{t\to -2^{+}} \cancelto{1}{\frac{(t+2)}{(t+2)}}\left[\sqrt{(t+3)}-(t-3)(t+1)\right]$$

$$= \lim_{t\to -2^{+}} \left[\sqrt{(t+3)}-(t-3)(t+1)\right]$$

$$\text{Sustituimos con } t=-2 = \lim_{t\to -2^{-}} \left[\sqrt{(-2+3)}-(-2-3)(-2+1)\right]$$

$$= \lim_{t\to -2^{+}} \sqrt{1}-5 = \lim_{t\to -2^{-}} -4 = -4$$

Finalmente:

Límite lateral derecho

$$\lim_{t\to -2^{-}} \frac{\sqrt{(t+3)}(t+2)-(t+2)(t-3)(t+1)}{t+2} = -4$$

Los límites laterales existen pero no son iguales. Por lo tanto:

Solución

$$\lim_{t\to -2} \frac{-t^3+7t+6+\sqrt{t^3+7t^2+16t+12}}{t+2} \quad \nexists$$

El límite NO EXISTE

Pregunta 1.b

$$\lim_{t\to 0} \frac{sen(4t^2) - t^3}{t^3 - t^2}$$

Sustituimos con $t = 0$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{sen(4\cdot 0^2) - 0^3}{0^3 - 0^2} = \lim_{t\to 0} \frac{sen(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

Nos encontramos con una indeterminación $\frac{0}{0}$. Para levantar la indeterminación, buscamos utilizar el límite notable

$$\lim_{t\to 0} \frac{sen(t)}{t} = 1$$

Dividimos el numerador y el denominador por t^2:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{sen(4t^2)}{t^2} - \frac{t^3}{t^2}}{\frac{t^3}{t^2} - \frac{t^2}{t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{sen(4t^2)}{t^2} - t}{t - 1}$$

Por propiedad de límites:

$$\lim_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{\lim_{t\to a} f(t)}{\lim_{t\to a} g(t)}, \quad \text{si } \lim_{t\to a} g(t) \neq 0$$

Y además:

$$\lim_{t\to a} [f(t) + g(t)] = \lim_{t\to a} f(t) + \lim_{t\to a} g(t)$$

Entonces, podemos reescribir el límite como:

$$\frac{\lim_{t\to 0} \frac{sen(4t^2)\cdot 4}{4\cdot (t^2)} - \lim_{t\to 0} t}{\lim_{t\to 0} t - \lim_{t\to} 1} = \frac{4 \lim_{t\to 0} \frac{sen(4t^2)\cdot}{4\cdot (t^2)} - 0}{0 - 1} = -4 \lim_{t\to 0} \frac{sen(4t^2)}{4t^2}$$

Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$u = 4t^2; \text{ si } t \to 0 \Rightarrow u \to 4\cdot 0^2 = u \to 0$$

Al aplicar el cambio de variable tenemos:

$$-4 \lim_{u \to 0} \frac{sen(u)}{u} = -4 \cdot 1 = \boxed{-4}$$

Luego, se concluye que:

Solución

$$lim_{t \to 0} \frac{sen(4t^2) - t^3}{t^3 - t^2} = -4$$

El límite SÍ EXISTE

Pregunta 1.c

$$\lim_{t \to \pi} \frac{1 + cos(t)}{(\pi - t)^2}$$

Sustituimos con $t = \pi$:

$$\lim_{t \to \pi} \frac{1 + cos(\pi)}{(\pi - \pi)^2} = \lim_{t \to \pi} \frac{1 - 1}{(0)^2} = \lim_{t \to \pi} \frac{0}{0}$$

Nos encontramos con una indeterminación $\frac{0}{0}$. Para levantar la indeterminación, realizamos el siguiente cambio de variable:

$$\theta = t - \pi; \text{ si } t \to \pi \Rightarrow \theta \to \pi - \pi = \theta \to 0; \; t = \theta + \pi$$

Al aplicar el cambio de variable tenemos:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1 + cos(\theta + \pi)}{(\pi - (\theta + \pi))^2} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1 + cos(\theta + \pi)}{(\pi - \theta - \pi)^2} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1 + cos(\theta + \pi)}{\theta^2}$$

Desarrollamos el **coseno de la suma de ángulos θ y π** sabiendo que:

$$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sen(\alpha) \cdot sen(\beta)$$

Coseno de la suma

$$cos(\theta + \pi) = cos(\theta) \cdot cos(\pi) - sen(\theta) \cdot sen(\pi) = -cos(\theta)$$

Luego, el límite queda:

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta \to 0} \frac{1+cos(\theta+\pi)}{\theta^2} &= \lim_{\theta \to 0} \frac{1-cos(\theta)}{\theta^2} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{1-cos(\theta)}{\theta^2} \cdot \frac{1+cos(\theta)}{1+cos(\theta)} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{1-cos^2(\theta)}{\theta^2 \cdot (1+cos(\theta)} \\
\boxed{1-cos^2(\theta) = sen^2(\theta)} &= \lim_{\theta \to 0} \frac{sen^2(\theta)}{\theta^2 \cdot (1+cos(\theta)} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \frac{sen^2(\theta)}{\theta^2} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{1+cos(\theta)} \\
&= \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{sen(\theta)}{\theta}\right)^2 \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{1+cos(\theta)}
\end{aligned}$$

Al ser θ^2 una función continua $\forall\ x \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que:

$$\lim_{\theta \to c} (f(\theta))^2 = (\lim_{\theta \to c} f(\theta))^2$$

Luego, el límite queda:

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{sen(\theta)}{\theta}\right)^2 \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{1+cos(\theta)} &= \left(\lim_{\theta \to 0} \frac{sen(\theta)}{\theta}\right)^2 \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{1+cos(\theta)} \\
&= \left(\lim_{\theta \to 0} 1\right)^2 \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{1+1} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Luego, se concluye que:

Solución

$$\lim_{t\to\pi} \frac{1+cos(t)}{(\pi-t)^2} = \frac{1}{2}$$

El límite SÍ EXISTE

Pregunta 1.d

$$\lim_{t\to\infty} (t+1)^{1/3}(1-t)^{2/3} - t$$

Sustituimos con $t = \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} (\infty+1)^{1/3}(1-\infty)^{2/3} - \infty = \lim_{t\to\infty} \sqrt[3]{\infty\cdot(-\infty)^2} - \infty = \lim_{t\to\infty} (\infty - \infty)$$

Nos encontramos con una indeterminación $\infty - \infty$. Para levantar la indeterminación, reescribimos el límite de manera que podamos multiplicarlo por su conjugada:

$$\lim_{t\to\infty} \left[(t+1)^{1/3}(1-t)^{2/3} - t\right] = \lim_{t\to\infty} \left[\sqrt[3]{(t+1)(1-t)^2} - t\right]$$

Recordemos la **Diferencia de cubos**:

$$(a^3 - b^3) = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$

Si tomamos

$$a = \sqrt[3]{(t+1)(1-t)^2} \text{ y } \; b = t, \text{ tal que } \; w = a^2+ab+b^2$$

entonces podemos reescribir el límite como:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sqrt[3]{(t+1)(1-t)^2}-t\right]\cdot\frac{w}{w} = \lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{(t+1)(1-t)^2}\right)^3-t^3}{w}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{(t+1)(1-t)^2-t^3}{w}$$

$$\underset{\text{Binomio al cuadrado}}{\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}} = \lim_{t\to\infty}\frac{(t+1)(1-2t+t^2)^2-t^3}{w}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{t-2t^2+\cancel{t^3}+1-2t+t^2-\cancel{t^3}}{w}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{-t^2-t+1}{w}$$

$$= -\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+t-1}{w}$$

Recordemos...

$$w=a^2+ab+b^2=\left(\sqrt[3]{(t+1)(1-t)^2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{(t+1)(1-t)^2}\right)\cdot(t)+(t)^2$$

Ahora dividimos el numerador y el denominador entre t^2.

$$-\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+t-1}{w} = -\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{t^2}{t^2}+\frac{t}{t^2}-\frac{1}{t^2}}{\frac{\left(\sqrt[3]{(t+1)(1-t)^2}\right)^2}{t^2}+\frac{\sqrt[3]{(t+1)(1-t)^2}}{t}\cdot\frac{t}{t}+\frac{t^2}{t^2}}$$

$$= -\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}{\left(\sqrt[3]{\frac{(t+1)}{t}\cdot\frac{(1-t)^2}{t^2}}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{(t+1)}{t}\cdot\frac{(1-t)^2}{t^2}}+1}$$

$$= -\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}{\left(\sqrt[3]{(1+\frac{1}{t})\cdot(\frac{1}{t}-1)^2}\right)^2+\sqrt[3]{(1+\frac{1}{t})\cdot(\frac{1}{t}-1)^2}+1}$$

$$\boxed{\text{Ahora sustituimos con } t=\infty} = -\lim_{t\to\infty} \frac{1+\cancelto{0}{\frac{1}{\infty}}-\cancelto{0}{\frac{1}{\infty^2}}}{\left(\sqrt[3]{(1+\cancelto{0}{\frac{1}{\infty}})\cdot(\cancelto{0}{\frac{1}{\infty}}-1)^2}\right)^2+\sqrt[3]{(1+\cancelto{0}{\frac{1}{\infty}})\cdot(\cancelto{0}{\frac{1}{\infty}}-1)^2}+1}$$

$$= -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[3]{(1)\cdot(-1)^2})^2+\sqrt[3]{(1)\cdot(-1)^2}+1}$$

$$= -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+1+1} = -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{3} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

Luego, se concluye que:

Solución

$$\lim_{t\to\infty}(t+1)^{1/3}(1-t)^{2/3}-t=-\frac{1}{3}$$

El límite SÍ EXISTE

PREGUNTA 2. Demuestre usando la definición de límite:

$$\lim_{t\to 2} t^4 = 16$$

SOLUCION 2. Veamos que si

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Se tiene que

Definición de Limites

$$\forall\epsilon>0\ \exists\,\delta>0: \forall x\in\mathbb{R},\ 0<|x-a|<\delta \Leftrightarrow 0<|f(x)-L|<\epsilon$$

En nuestro caso

$$\forall\epsilon>0\ \exists\,\delta>0: \forall x\in\mathbb{R},\ 0<|t-2|<\delta \Leftrightarrow 0<|t^4-16|<\epsilon$$

Luego mediante un calculo previo,

$$\begin{aligned}|t^4-16| &= |t^4-2^4|\\ &= |(t^2-2^2)(t^2+2^2)|\\ &= |(t-2)(t+2)(t^2+2^2)|\\ &= |t-2||t+2||t^2+2^2|\end{aligned}$$

Acotamos, partiendo de $|x-2|<\delta$, tomando $\delta = 1$,

$$\begin{aligned} \bullet\ |t-2|<1 &\Longleftrightarrow -1<t-2<1 \\ &\Longrightarrow -1+4<t-2+4<1+4 \\ &\Longrightarrow 3<t+2<5 \\ &\Longrightarrow -5<3<t+2<5 \\ &\Longrightarrow |t+2|<5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ |t-2|<1 &\Longleftrightarrow -1<t-2<1 \\ &\Longrightarrow -1+2<t-2+2<1+2 \\ &\Longrightarrow 1<t<3 \\ &\Longrightarrow 1<t^2<9 \\ &\Longrightarrow 5<t^2+2^2<13 \\ &\Longrightarrow -13<5<t^2+2^2<13 \\ &\Longrightarrow |t^2+2^2|<13 \end{aligned}$$

Luego, volviendo al calculo previo:

$$\begin{aligned} |t^4-16| &= |t-2||t+2||t^2+2^2| \\ &= \delta\ (5)\ (13) < \epsilon \\ &= \delta < \frac{\epsilon}{(13)(5)} \\ &= \delta < \frac{\epsilon}{65} \end{aligned}$$

Culminado el calculo previo, procedemos con la demostración:

Dado $\epsilon > 0$, tomamos $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{65}\}$, tal que

$$\begin{aligned} 0 < |t-2| &< \delta \\ |t-2| &< \frac{\epsilon}{65} \\ |t-2| &< \frac{\epsilon}{(13)(5)} \\ (13)(5)|t-2| &< \epsilon \\ |t-2||t+2||t^2+2^2| &< \epsilon \\ |t^2-2^2||t^2+2^2| &< \epsilon \\ |t^4-16| &< \epsilon \end{aligned}$$

Por lo que queda demostrado. asi:

Solución

$$\boxed{\lim_{t\to 2} t^4 = 16 \leftarrow \text{Existe}}$$

PREGUNTA 3. Analice la continuidad y diferenciabilidad de la siguiente función en $x = -5$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\frac{8}{7}x^3+x^2-49x-98}{7x+49} & si \quad x < -5 \\ \\ \frac{1}{49}x^2 - \frac{5}{7}x - 2 & si \quad x \geq 5 \end{cases}$$

SOLUCION 3. Teniendo en cuenta que

Condiciones Continuidad

1. $f(x_0)$ existe (Siendo x_0 un punto arbitrario perteneciente al dominio de la función).

2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ (Los límites laterales al punto x_0 existen y tienen un valor numérico).

3. $f(x_0) = L$ (El límite del punto x_0 es igual al valor de la función en ese punto x_0).

Veamos la continuidad de $f(x)$ en x=-5

$$\begin{aligned} \textbf{(1)}\ f(-5) &= \frac{1}{49}(-5)^2 - \frac{5}{7}(-5) - 2 \\ &= \frac{25}{49} + \frac{25}{7} - 2 \\ &= \frac{25}{7}(\frac{1}{7} + 1) - 2 \\ &= \frac{25}{7}(\frac{8}{7}) - 2 \\ &= \frac{(25)(8)}{49} - \frac{98}{49} \\ &= \frac{200 - 98}{49} \\ &= \frac{102}{49} \end{aligned}$$

(2) $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$(Por la naturaleza de $f(x)$ estudiamos los limites laterales)

- $$\begin{aligned} \lim_{x\to -5^-} f(x) &= \frac{\frac{8}{7}x^3 + x^2 - 49x - 98}{7x + 49} \\ &= \frac{\frac{8}{7}(-5)^3 + (-5)^2 - 49(-5) - 98}{7(-5) + 49} \\ &= \frac{\frac{8}{7}(-125) + (25) - 49(-5) - 98}{7(-5) + 49} \\ &= \frac{\frac{8}{7}(-125) + 25 - 49(-5 + 2)}{-35 + 49} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{14}\{25(\frac{-40}{7}+1)-49(-3)\}\\
&= \frac{1}{14}\{25(\frac{-33}{7})+147\}\\
&= \frac{1}{14}\{\frac{(25)(-33)+(147)(7)}{7}\}\\
&= \frac{1}{98}\{-825+1029\}\\
&= \frac{204}{98}=\frac{102}{49}
\end{aligned}$$

- $$\lim_{x\to -5^+} f(x) = \frac{1}{49}(-5)^2 - \frac{5}{7}(-5) - 2 = \frac{102}{49}$$

Luego, como $\lim_{x\to -5^-} f(x) = \lim_{x\to -5^+} f(x) = \frac{102}{49}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -5} f(x) = \frac{102}{49} \ \textbf{EXISTE}$$

$$\textbf{(3)} \lim_{x\to -5} f(x) = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ es continua en x=-5}$$

En cuanto a la derivabilidad de una función, se tiene que

Condiciones Derivabilidad

Una función es derivable en un punto si:
1. Es continua en dicho punto
2.Las derivadas laterales existen y tienen un mismo valor numérico.
Es conocido que la derivada de una función viene dada por:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Por lo tanto las derivadas laterales vienen dadas por:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Veamos la derivabilidad de f(x) en x=-5, por la naturaleza de la función estudiamos las derivadas laterales

- $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(-5+h)-f(-5)}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\frac{\frac{8}{7}(-5+h)^3+(-5+h)^2-49(-5+h)-98}{7(-5+h)+49}-\frac{102}{49}}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\frac{\frac{8}{7}(-125+3(25)(h)+3(-5)(h^2)+h^3)+(25-10h+h^2)-49(-5+h)-98}{14+7h}-\frac{102}{49}}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\frac{\frac{8}{7}(-125+3(25)(h)+3(-5)(h^2)+h^3)+(25-10h+h^2)-49(-5+h)-98}{14+7h}-\frac{102}{49}}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\frac{8(-125+(75)(h)+(-15)(h^2)+h^3)+7(25-10h+h^2)-343(-5+h)-686}{7(14+7h)}-\frac{102}{49}}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\frac{(-1000+600(h)-120(h^2)+8h^3)+(175-70h+7h^2)+(1715-343h)-686}{49(2+h)}-\frac{102}{49}}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\frac{8h^3-113h^2+187h+204}{49(2+h)}-\frac{102}{49}}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\frac{8h^3-113h^2+187h+204-204-102h}{49(2+h)}}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{8h^3-113h^2+85h}{49(2+h)h}$

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{8h^2-113h+85}{49(2+h)} = \dfrac{85}{49(2)} = \dfrac{85}{98}$

- $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(-5+h)-f(-5)}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{49}(-5+h)^2-\frac{5}{7}(-5+h)-2-\frac{102}{49}}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{(25-10h+h^2)-35(-5+h)-98-102}{49h}$

$\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{25-10h+h^2+175-35h-200}{49h}$

$\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^2-45h}{49h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h-45}{49} = \dfrac{-45}{49}$

Luego, como las derivadas laterales son diferentes, se tiene que $f(x)$ no es derivable en x=-5

Solución

Asi, $f(x)$ en $x=-5$ es continua pero no derivable

PREGUNTA 4. Encuentre, usando el Teorema del Valor Intermedio, que en al menos un intervalo, la ecuación

$$\sec(2x) + 3 = 0$$

posea dos raíces reales.

Tenemos que

$$\boxed{\sec(2x) + 3 = \frac{1}{\cos(2x)} + 3 = 1 + 3\cos(2x) = 0}$$

Buscamos $x = a$ y $x = b$ tales que $f(a)f(b) < 0$ ya que de ocurrir esto, $\exists\, x = c : f(c) = 0$, con $x = c \in (a, b)$.

Tanteando:

- Si $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(\frac{\pi}{4}) = 1 + 3\cos(\frac{\pi}{2}) = 1 \ \ (1 > 0)$
- Si $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = 1 + 3\cos(\pi) = 1 - 3 = -2 \ \ (-2 < 0)$

si tenemos en cuenta que la función $\cos(x)$ es par

- Si $x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(-\frac{\pi}{2}) = 1 + 3\cos(-\pi) = 1 + 3\cos(\pi) = 1 - 3 = -2 \ \ (-2 < 0)$

Por lo tanto, si en el intervalo $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})\exists\, x = c : f(c) = 0$, en el intervalo $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\exists\, x = c : f(c) = 0$, y la ecuacion $1 + 3\cos(2x) = 0$ es equivalente a $\sec^{-1}(2x) + 3 = 0$, tenemos que

Solución

$\sec(2x) + 3 = 0$ posee dos raices en el intervalo $(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$

Cuidado

Es importante que la función sea continua en el intervalo planteado, de lo contrario el teorema no aplica. En este caso encontramos que la funcion original la cual es discontinua en $x \backslash \cos(2x) = 0$, es equivalente a una funcion continua en todo $\mathbb{R}$ por ello pudimos unir los intervalos

Este exámen fue digitalizado en LaTeX por **Luis Doria** y **César García** para **GECOUSB**

Luis Fernando Doria
20-10241
Ing. Química

César García
21-10225
Ing. Electrónica

gecousb.com.ve

Cualquier error de tipeo o en la resolución de los ejercicios, notificar a **luisferdoria2003@gmail.com** ó **cesar.garcia.aug2004@gmail.com**